

SESIÓN 11

SISTEMA DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCOGNITAS I

I. CONTENIDOS:

1. Concepto y representación geométrica.
2. Métodos de solución:
 - Igualación
 - Sustitución.
 - Reducción (suma y resta).
 - Determinante.
 - Gráfico.

II. OBJETIVOS:

Al término de la Sesión, el alumno:

- Conocerá métodos de solución para sistemas de ecuaciones.
- Resolverá sistemas de ecuaciones.

III. PROBLEMATIZACIÓN:

Comenta las preguntas con tu Asesor y selecciona las ideas más significativas.

- ¿Cuál es el fin de que existan varios métodos de solución para sistemas de ecuaciones?
- ¿Cómo representarías en una gráfica la solución de un sistema de ecuaciones?

IV. TEXTO INFORMATIVO-FORMATIVO:

1.1. Concepto y representación geométrica

Un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas es un sistema de dos ecuaciones que tiene dos variables. Se representa por dos líneas rectas que se cortan en un punto

2.1. Métodos de solución

- **Resolución por igualación.**

Tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 22 \\ 2x + 5y = 18 \end{cases}$$

Esto significa, encontrar el punto de intersección entre las rectas dadas, de las cuales se conoce su ecuación. Despejamos una de las dos variables en las dos ecuaciones, con lo cual tenemos un sistema equivalente (en este caso elegimos y):

$$\begin{cases} y = \frac{22 - 4x}{3} \\ y = \frac{18 - 2x}{5} \end{cases}$$

Recordamos que al tener dos ecuaciones, si los primeros miembros son iguales los segundos también lo son, por lo tanto:

$$\frac{22 - 4x}{3} = \frac{18 - 2x}{5}$$

Luego:

$$\begin{aligned} 5(22 - 4x) &= 3(18 - 2x) \\ 110 - 20x &= 54 - 6x \\ -20x + 6x &= 54 - 110 \\ -14x &= -56 \\ x &= \frac{-56}{-14} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Reemplazamos el valor de x obtenido en alguna de las ecuaciones (elegimos la segunda):

$$y = \frac{18 - 2(4)}{5}$$

Operamos para hallar el valor de y:

$$y = \frac{18 - 8}{5}$$

$$y = \frac{10}{5}$$

y=2

Verificamos, en ambas ecuaciones, para saber si realmente $(x ; y) = (4;2)$:

$$4(4) + 3(2) [=] 22 \quad 2(4) + 5(2) [=] 18$$

$$16 + 16 [=] 22 \quad 8 + 10 [=] 18$$

$$22 = 22 \quad 18 = 18$$

Ahora sí, podemos asegurar que **x= 4 e y = 2**

Realice este mismo ejemplo despejando x al comienzo y reemplazando en las dos ecuaciones.

○ **Resolución por sustitución.**

Tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 22 \\ 2x + 5y = 18 \end{cases}$$

Despejamos una de las variables en una de las ecuaciones (en este caso elegimos y en la primera ecuación):

$$y = \frac{22 - 4x}{3}$$

Y la reemplazamos en la otra ecuación:

$$2x + 5\left(\frac{22 - 4x}{3}\right) = 18$$

Operamos para despejar la única variable existente ahora:

$$2x + \frac{110 - 20x}{3} = 18$$

$$2x + \frac{110}{3} - \frac{20x}{3} = 18$$

$$2x - \frac{20x}{3} = 18 - \frac{110}{3}$$

$$-\frac{14x}{3} = -\frac{46}{3}$$

$$14x = 56$$

$$x = \frac{56}{14}$$

$$x = 4$$

Reemplazamos el valor de x obtenido en alguna de las ecuaciones (elegimos arbitrariamente la primera):

$$4(4) + 3y = 22$$

$$16 + 3y = 22$$

$$3y = 22 - 16$$

$$3y = 6$$

$$y = \frac{6}{3}$$

$$y = 2$$

Hallamos la respuesta $x=4$, $y = 2$, obviamente igual que en el caso anterior. No verificaremos, dado que ya sabemos que esta respuesta es correcta.

Realice este mismo ejemplo despejando x al comienzo.

○ **Resolución por reducción.**

Tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{cases} 4x+3y=22 \\ 2x+5y=18 \end{cases}$$

El objetivo es eliminar una de las incógnitas, dejándolas inversas aditivas, sabiendo que una igualdad no cambia si se la multiplica por un número. También sabemos que una igualdad no se cambia si se le suma otra igualdad.

Si se quiere eliminar la x , ¿por qué número debo multiplicar a la segunda ecuación, para que al sumarla a la primera se obtenga cero?

La respuesta es -2 . Veamos:

$$4x+3y = 22$$

$$(-2) \rightarrow 2x+5y = 18$$

Con lo que obtenemos:

$$4x+3y = 22$$

$$-4x-10y = -36$$

Y la sumamos la primera obteniéndose:

$$-7y = -14$$

$$y = 2$$

Reemplazar el valor obtenido de y en la primera ecuación:

$$4x+3(2) = 22$$

$$4x+6 = 22$$

Y finalmente hallar el valor de x :

$$4x = 22-6$$

$$4x = 16$$

$$x = \frac{16}{4}$$

$$x = 4$$

Ejercicio: Resuelve por este método:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}y = 4 \\ 4x + 8y = 40 \end{cases}$$

○ **Resolución por determinante.**

Sabemos que un determinante se representa como:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Este se calcula de la siguiente manera: $D = a \cdot d - b \cdot c$

Sea el sistema:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

El valor de x está dado por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Resolvamos el sistema:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 22 \\ 2x + 5y = 18 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 22 & 3 \\ 18 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{110 - 54}{20 - 6} = \frac{56}{14} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 22 \\ 2 & 18 \end{vmatrix}}{14} = \frac{72 - 44}{14} = \frac{28}{14} = 2$$

El punto de intersección de las rectas dadas es $\{(4, 2)\}$

○ **Método gráfico.**

Cada una de las ecuaciones que forman un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas es la de una función de primer grado, es decir, una recta. El método gráfico para resolver este tipo de sistemas consiste, por tanto, en representar en unos ejes cartesianos, o sistema de coordenadas, ambas rectas y comprobar si se cortan y, si es así, dónde.

Hay que tener en cuenta, que, en el plano, dos rectas sólo pueden tener tres posiciones relativas (entre sí):

- Se cortan en un punto, Si las dos rectas se cortan en un punto, las coordenadas de éste son el par (x, y) que conforman la única solución del sistema,
- Son paralelas. Si las dos rectas son paralelas, no tienen ningún punto en común, por lo que no hay ningún par de números que representen a un punto que esté en ambas rectas
- Son coincidentes (la misma recta). si ambas rectas son coincidentes, hay infinitos puntos que pertenecen a ambas, lo cual nos indica que hay infinitas soluciones del sistema (todos los puntos de las rectas)

El proceso de resolución de un sistema de ecuaciones mediante el método gráfico se resume en las siguientes fases:

- 1) Se despeja la incógnita y en ambas ecuaciones.
- 2) Se construye, para cada una de las dos funciones de primer grado obtenidas, la tabla de valores correspondientes.
- 3) Se representan gráficamente ambas rectas en los ejes coordenados.
- 4) En este último paso hay tres posibilidades:
 - i) Si ambas rectas se cortan, las coordenadas del punto de corte son los únicos valores de las incógnitas x e y . Sistema compatible determinado.
 - ii) Si ambas rectas son coincidentes, el sistema tiene infinitas soluciones que son las respectivas coordenadas de todos los puntos de esa recta en la que coinciden ambas. Sistema compatible indeterminado.
 - iii) Si ambas rectas son paralelas, el sistema no tiene solución. Sistema incompatible.

Ejemplo:

Entre Alan y Juan tienen 600 timbres, pero Juan tiene el doble de timbres que Alan. ¿Cuántos timbres tiene cada uno?

Llamemos x al número de timbres de Alan e y al de Juan. Vamos a expresar las condiciones del problema mediante ecuaciones: Si los dos tienen 600 timbres, esto nos proporciona la ecuación $x +$

$y = 600$. Si Juan tiene el doble de timbres que Alan, tendremos que $y = 2x$. Ambas ecuaciones juntas forman el siguiente sistema:

$$x + y = 600 \quad 2x - y = 0$$

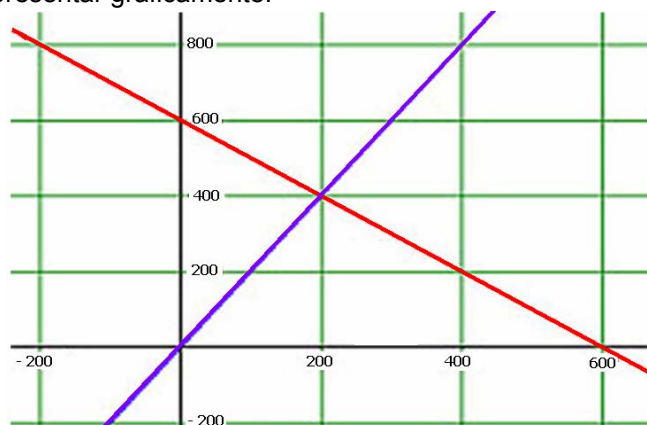
Para resolver el sistema por el método gráfico despejamos la incógnita y en ambas ecuaciones y tendremos:

$$y = -x + 600 \quad y = 2x$$

Vamos ahora, para poder representar ambas rectas, a calcular sus tablas de valores:

$y = -x + 600$		$y = 2x$	
x	y	x	y
200	400	100	200
600	0	200	400

Con estas tablas de valores para las dos rectas y eligiendo las escalas apropiadas en los ejes OX y OY, podemos ya representar gráficamente:



Si observamos la gráfica, vemos claramente que las dos rectas se cortan en el punto (200, 400), luego la solución del sistema es $x = 200$ e $y = 400$. Por tanto, la respuesta al problema planteado es que Alan tiene 200 timbres y Juan tiene 400 euros.

V. ESTRATEGIAS CENTRADAS EN EL APRENDIZAJE:

A. Traza en una gráfica e interpreta el sistema:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 4 \quad \text{-- (1)} \\ x + 2y &= -3 \quad \text{-- (2)} \end{aligned}$$

B. Resuelve por suma o resta y/o sustitución y/o igualación:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 4 \quad \text{-- (1)} & 2x - 3y &= 7 \quad \text{-- (1)} \\ x + y &= 5 \quad \text{-- (2)} & 3x + y &= 5 \quad \text{-- (2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - y &= -6 \quad \text{-- (1)} & 4x + 2y &= 5 \quad \text{-- (1)} \\ 2x + 3y &= 7 \quad \text{-- (2)} & 5x - 3y &= -2 \quad \text{-- (2)} \end{aligned}$$

C. Resuelve el Problema Reto. Resuelve:

$$\frac{2x-1}{3} + \frac{y+2}{4} = 4 \quad \text{---(1)}$$

$$\frac{x+3}{2} - \frac{x-y}{3} = 3 \quad \text{---(2)}$$